אפקט הפרפר – הדוגמא של שילניקוב

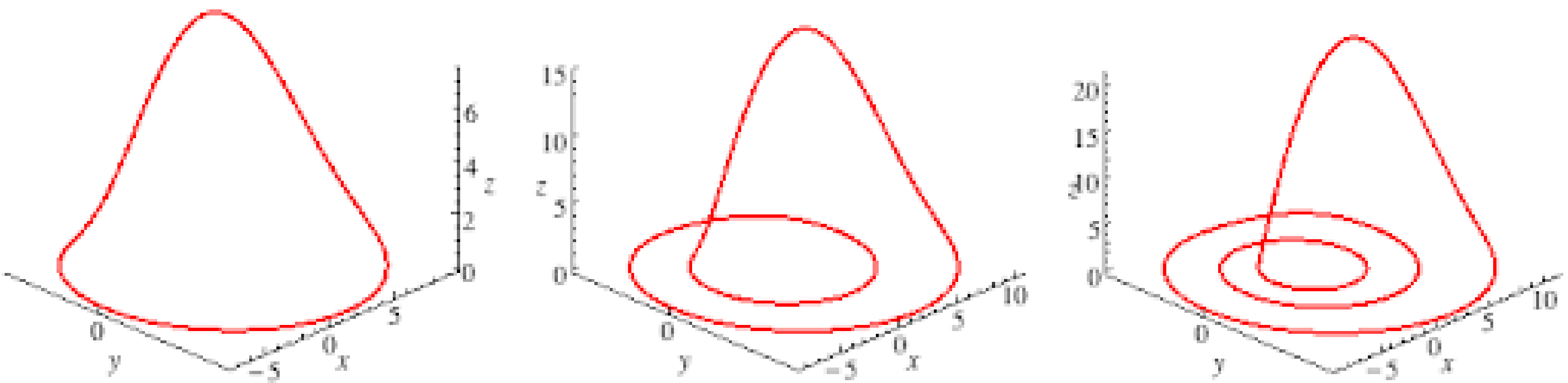
נניח ונתונה לנו מערכת מד"ר אוטונומית $\dot{x} = F(x)$ ב $\mathbb{R}^3$. נניח בנוסף שמתקיים $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$.

אוסף כלל הפתרונות למערכת כזאת יקרא **זרימה**.

ממשפט הקיום והיחידות – הזרימה מוגדרת היטב. ניתן להוכיח שבתנאים אלה, אינטרוול הזמן לכל פיתרון הוא $\mathbb{R}$.

תכונות של זרימות

- **דטרמיניסטיות** – בהינתן תנאי התחלה, העבר והעתיד שלו נקבעים לפי חוקים מוחלטים.
- **קיום פתרונות קבועים** – לעיתים ישנן נקודות שבת.
- **קיום פתרונות מחזוריים** – פתרונות עבורם קיים $T > 0$ כך שמתקיים $x(t) = x(T + t)$.



אפקט הפרפר – הדוגמא של לורנץ

- נתבונן במערכת:

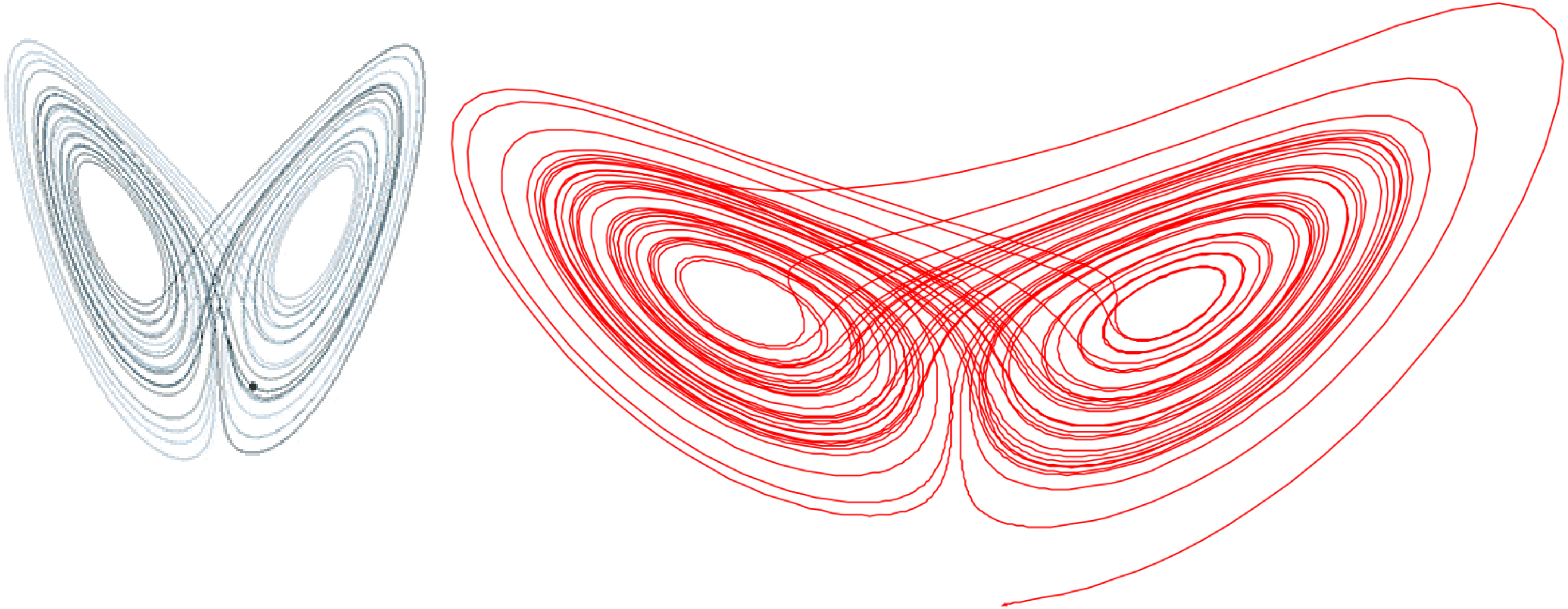
$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - \beta z$$

- ב1963 אדוארד לורנץ [1] שם לב לכך שבערכי פרמטרים $(\sigma,\rho,\beta) = \left(10,\frac{8}{3},28\right)$ הפתרונות כולם מתנהגים "כאוטית" – יותר ספציפית, כל שני תנאי התחלה, לא משנה כמה קרובים, התרחקו אחד מהשני בעתיד.

האטרקטור של לורנץ

- באופן יותר ספציפי, לורנץ שם לב שכל הפתרונות בשלב מסוים נמשכו אל האובייקט הבא – **האטרקטור של לורנץ**.

- לאחר שהגיעו אליו, תנועתם הפכה לכאוטית – כלומר, כל שני תנאי התחלה על האטרקטור, לא משנה כמה הם היו קרובים, התרחקו בעתיד.



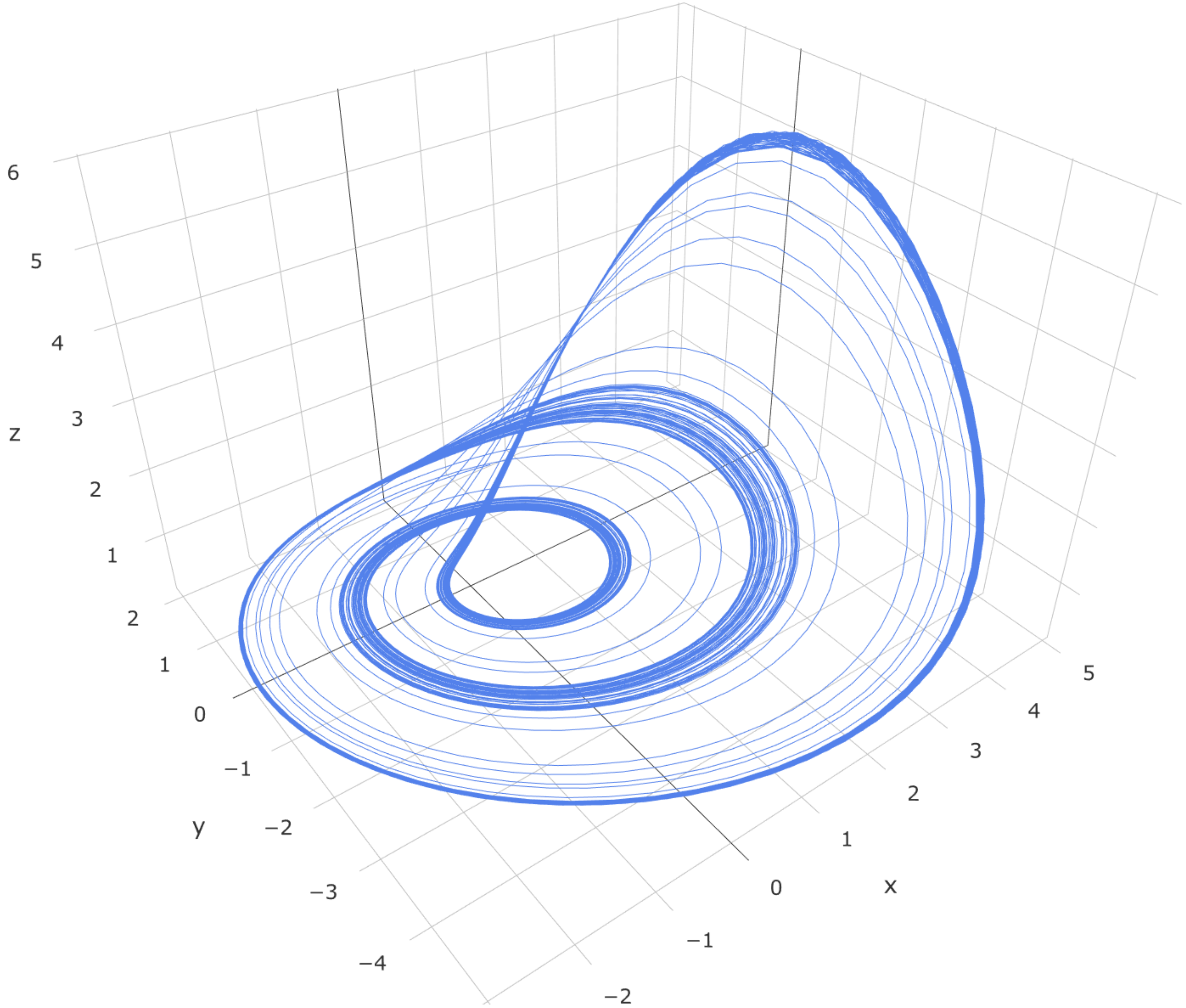
הדוגמא של רסלר

- ב1976, אוטו רסלר [2] גילה את המערכת הבאה:

$$\dot{x} = -y - z$$
$$\dot{y} = x + ay$$
$$\dot{z} = b + z(x - c)$$

- עבור ערכי פרמטרים $(a,b,c) = (0.2,0.2,5.7)$ נצפה אטרקטור כאוטי.

- עם הזמן, נמצאו מערכות רבות אחרות עם אטרקטורים כאוטיים.

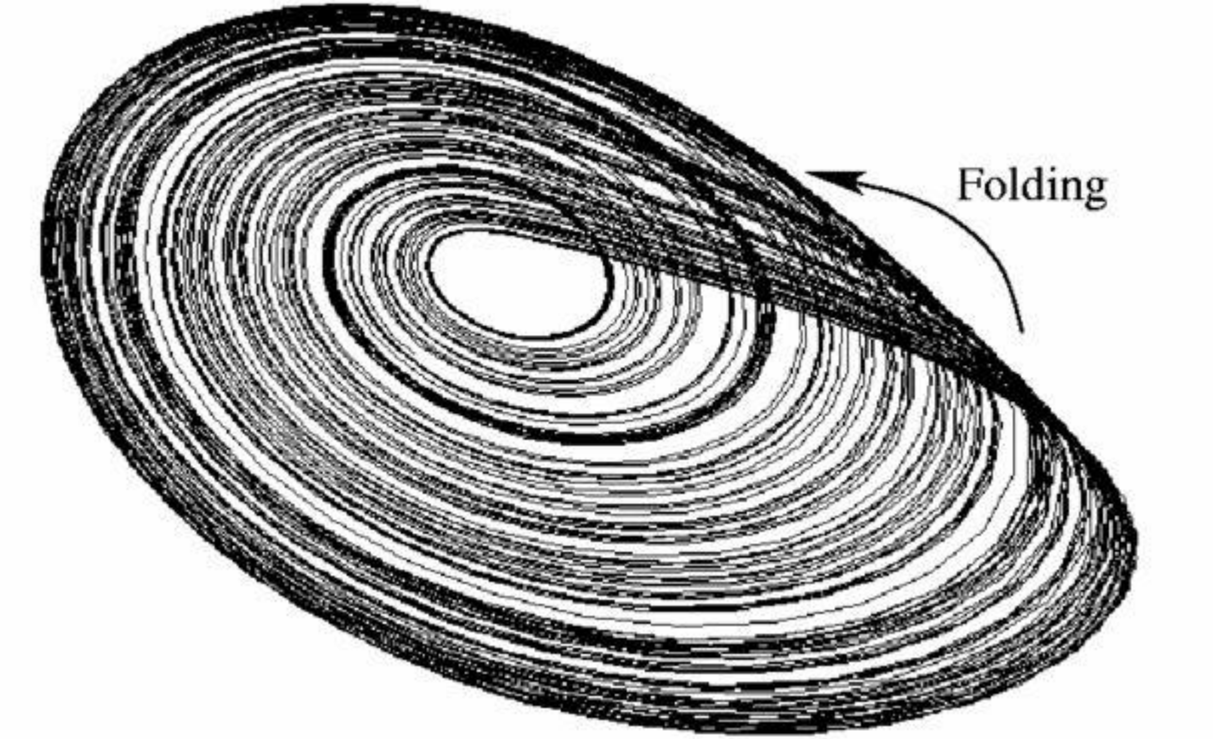


z
6
5
4
3
2
1
y
2
1
0
−1
−2
−3
−4
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2

מהו כאוס? מה הנומריקה מלמדת אותנו

- כאוס היא תופעה נומרית והגדרתה יותר רעיונית מריגורוזית. אין הגדרה אחת קולעת.

- כאוס לרוב מופיע במערכות אשר ניתן לתאר את פעולתן, באופן אינטואיטיבי, כ"מתיחה קיפול" – או פשוט ""קיפול". באופן אינטואיטיבי, זה גם מסביר מדוע אטרקטורים כאוטיים הם לעיתים קרובות "פרקטלים".



מהו כאוס? נומריקה מול ריגורוזיות

- אנחנו נעבוד עם ההגדרה הטופולוגית לכאוס, של רוברט דיבייני:

*תהי פונקציה רציפה $f: X \to X$ במרחב מטרי (X,d). נאמר שהיא **כאוטית** אם מתקיים:*

1. ***צפיפות המחזורים*** *- הנקודות המחזוריות צפופות בX.*

2. ***טרנזיטיביות*** *– יהיו $A,B \subset X$ פתוחות, אז ישנו $n > 0$ עבורו $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.*

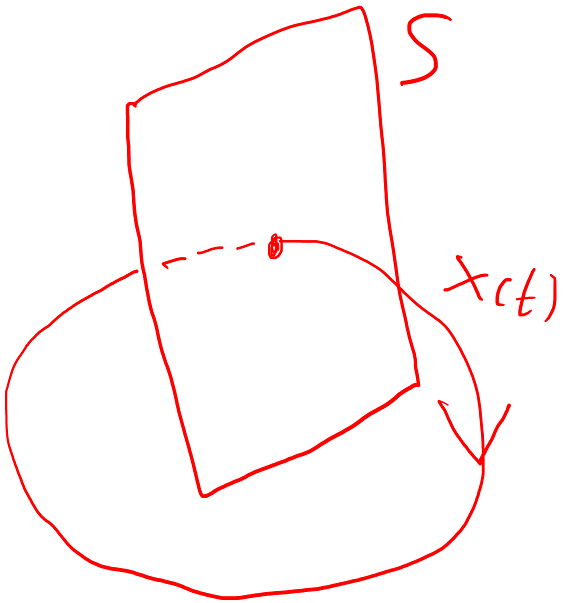
3. ***רגישות לתנאי התחלה*** *– קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in X$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימים $y \in B_\varepsilon(x)$ ו$n > 0$ עבורם $d\left(f^n(x),f^n(y)\right) \geq \delta$.*

העתקת פואנקרה

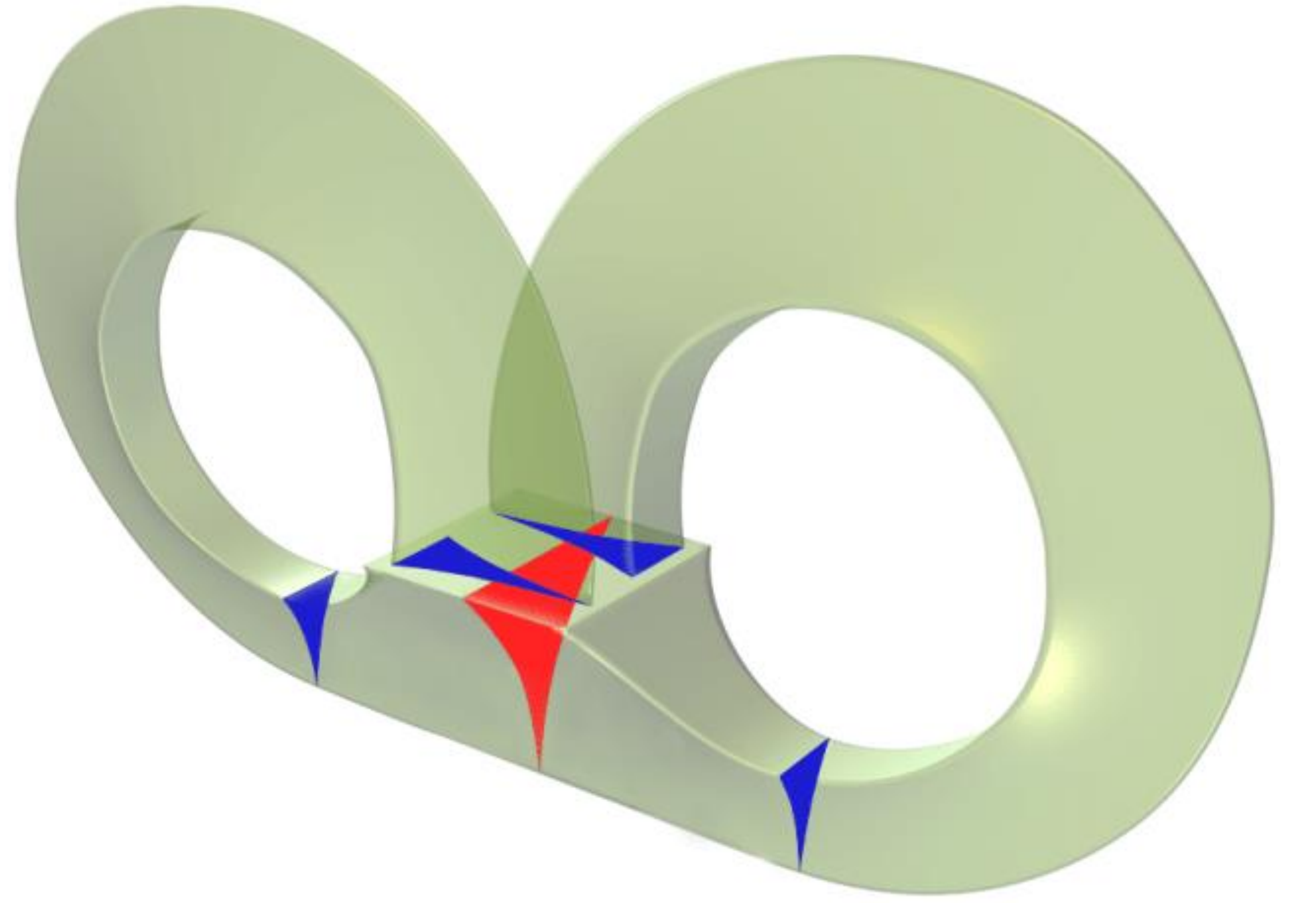
- לחקור זרימות באופן ישיר זה מסובך. לעיתים קרובות בלתי אפשרי לתאר את המערכת בצורה מפורשת.

- העתקת פואנקרה מאפשרת לנו לחקור מקומית זרימות על ידי רדוקציה לדינמיקה בזמן בדיד.

- נאמר שזרימה היא כאוטית באיזור מסוים אם העתקת הפואנקרה שלה כאוטית.



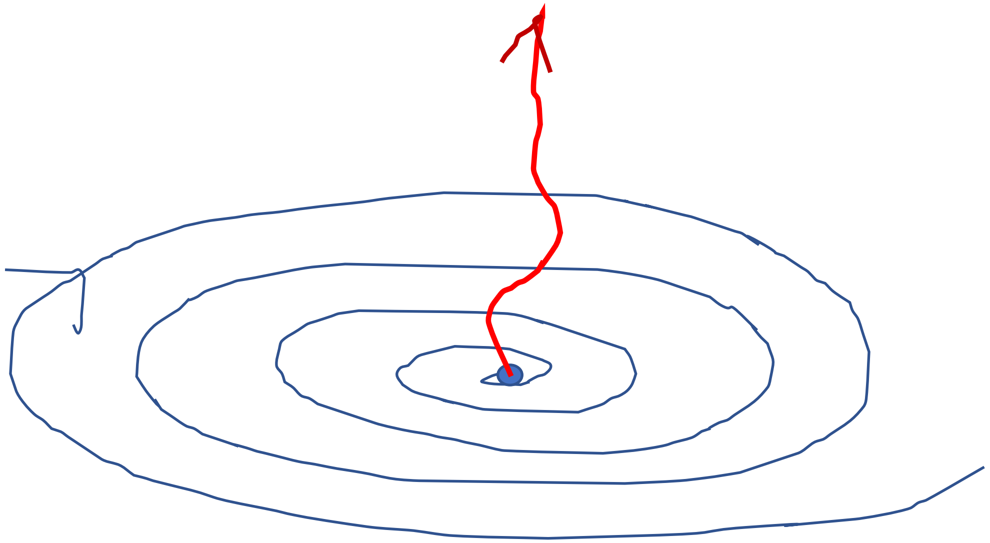
חתכי פואנקרה של אטרקטור לורנץ



משפט שילניקוב – הכנה

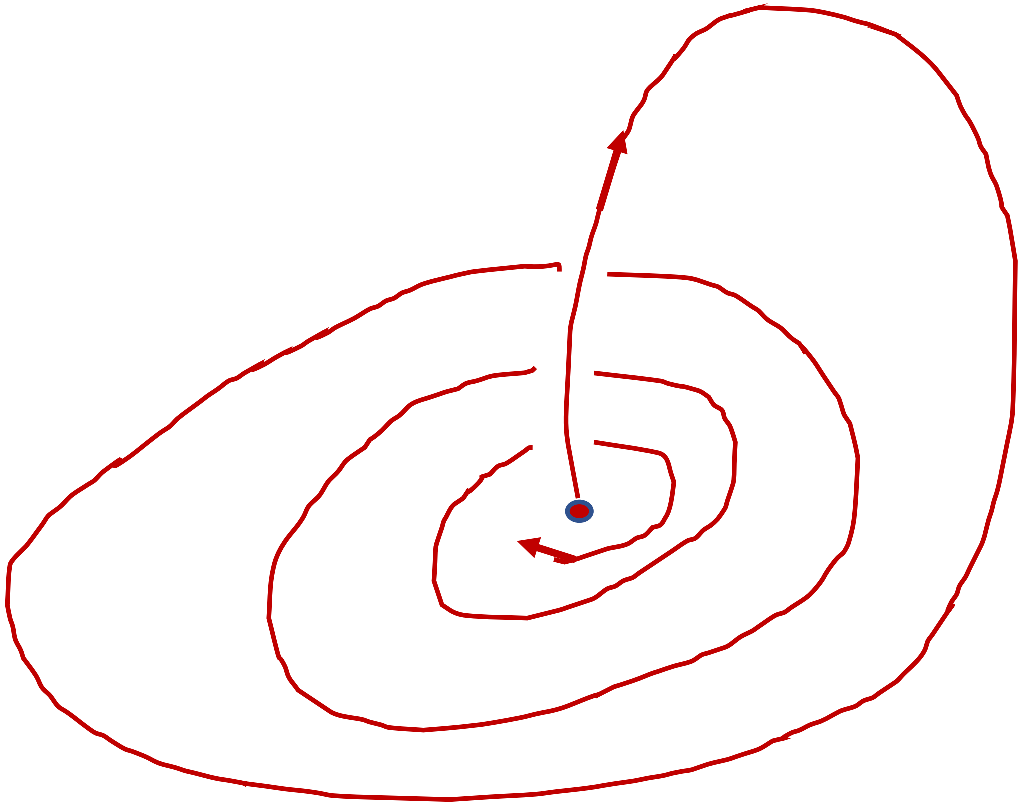
- תהי 0 נקודת שבת של הזרימה $\dot{x} = F(x)$ ב$\mathbb{R}^3$. נסמן על ידי J את מטריצת היעקוביאן ב0.
נניח שהערכים העצמיים הם מהצורה $-a \pm ib, \gamma$, כך ש $a, \gamma > 0, b \neq 0$.

- **משפט היריעה היציבה** – ישנה מסילה Γ ה"יוצאת" מ0 כך שלכל t, $x \in \Gamma$, יתקיים $x(t) \in \Gamma$.
בנוסף, כל $x \in \Gamma$ מקיים $x(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$.
- **משפט הרטמן-גרובמן** – בסביבה מספיק קטנה של 0, הזרימה שקולה טופולוגית לזאת המוגדרת על ידי המערכת הליניארית $\dot{x} = Jx$.

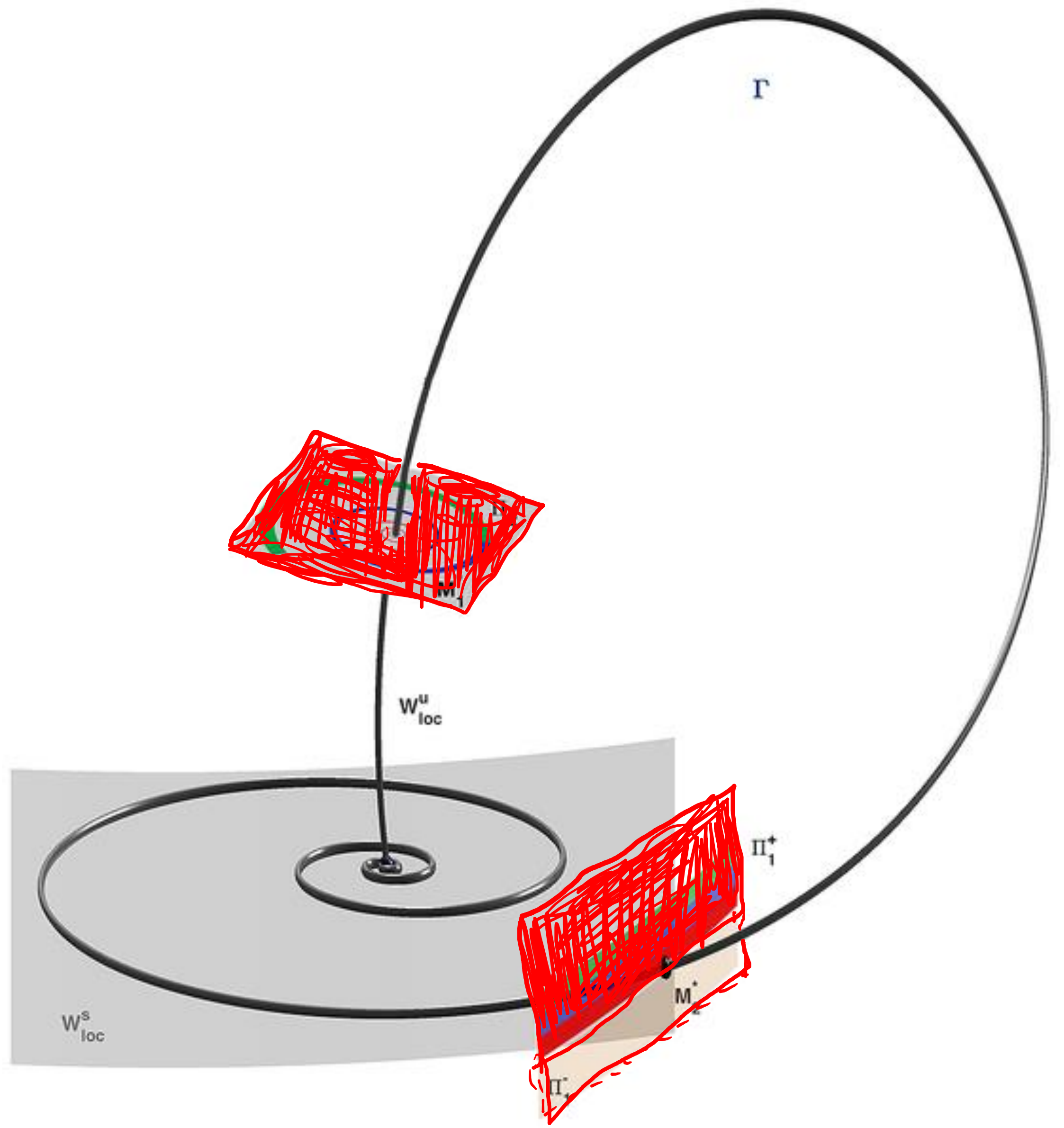


משפט שילניקוב [3]

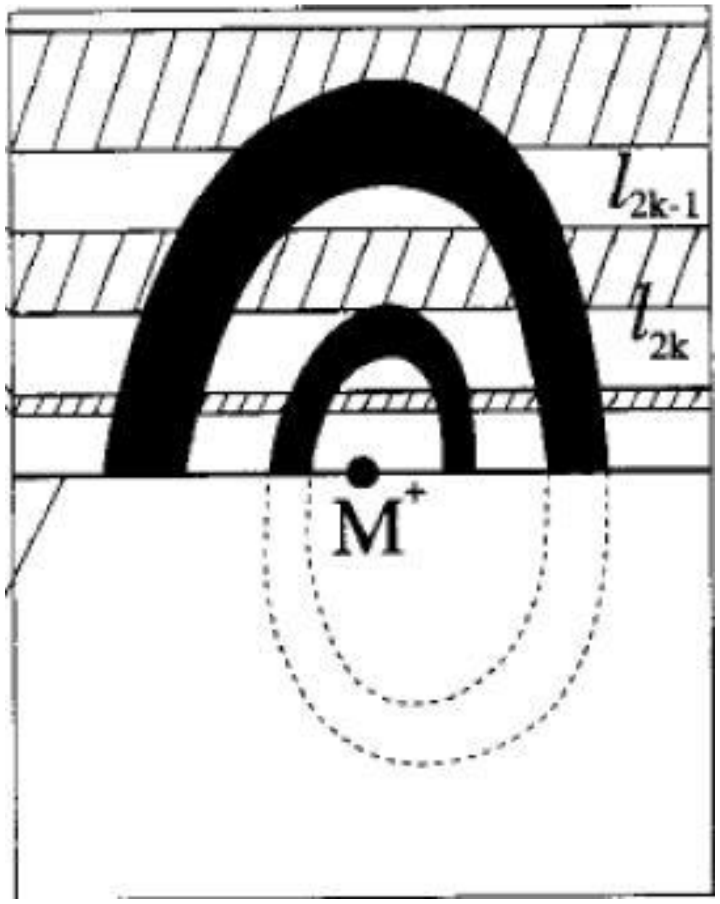
תחת הסימונים וההנחות הקודמות, נניח שלכל $x \in \Gamma$ מתקיים $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. אזי, אם $0 > \gamma - a$ אז בכל סביבה של Γ הזרימה כאוטית.

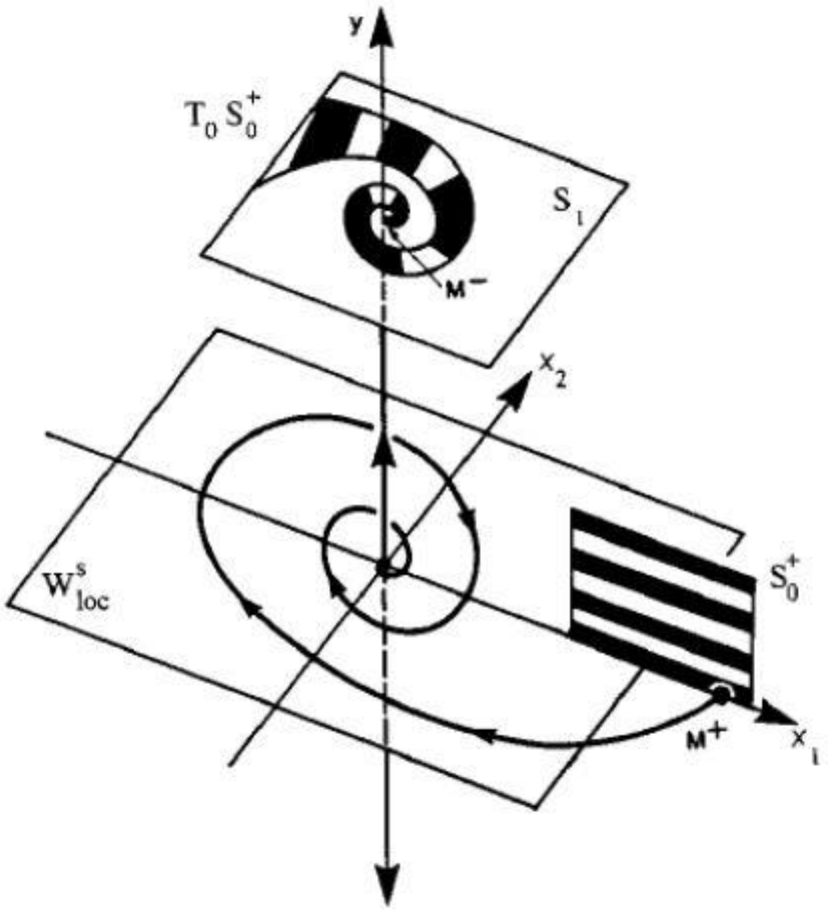


סקיצת הוכחה – חלק א' – בחירת חתכי פואנקרה



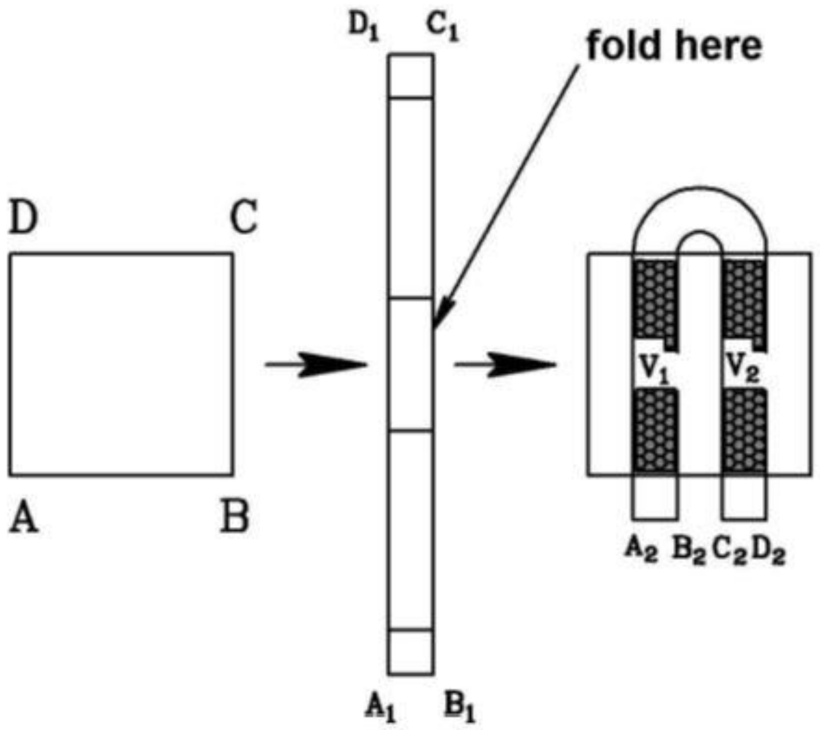
סקיצת הוכחה – חלק ב' – התמונה





סקיצת הוכחה – חלק ג' – הפרסה של סמייל

• נניח שנתון לנו דיפאומורפיזם של מלבן המוגדר במישור כולו, f אשר מתנהג בדומה לדיאגרמה הבאה:



• כל $x \in V_1 \cup V_2$ נסמן ב1 אם $x \in V_1$ ו2 אם $x \in V_2$. נחזור על תהליך זה עבור ערכי $f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$ וכן הלאה.

נתאים לכל x עבורו $\{x, f(x) \dots\} \subset V_1 \cup V_2$ סדרה מהצורה $\{x_i\}_{i>0}$ כאשר $x_i \in \{1,2\}$.
קבוצה זאת לא ריקה.

סקיצת הוכחה – חלק ג' – הפרסה של סמייל

- נשים לב – הסדרה המתאימה ל$f(x)$ היא פשוט **ההזזה** באינדקס אחד שמאלה.

- כלומר, ניתן לתאר את הפעולה של f באופן הבא:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_2, x_3, \dots)$$

- באופן דומה, אפשר לבצע משהו דומה ביחס לf^{-1} וליצור סדרה דומה שמייצגת את $\{x, f^{-1}(x) \dots\}$. ניתן להראות שאוסף הסדרות המשורשרות, כלומר, סדרות מהצורה $\left\{\{\dots f^{-1}(x), x, f(x) \dots\}\right\}_x$ הוא **בדיוק** $\{1,2\}^{\mathbb{Z}}$. גם כאן, ניתן לתאר את הפעולה כ:

$$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \to \{x_{i-1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

סקיצת הוכחה – חלק ג' – הפרסה של סמייל

- ניתן להראות ש f רציפה ביחס למטריקה הבאה:

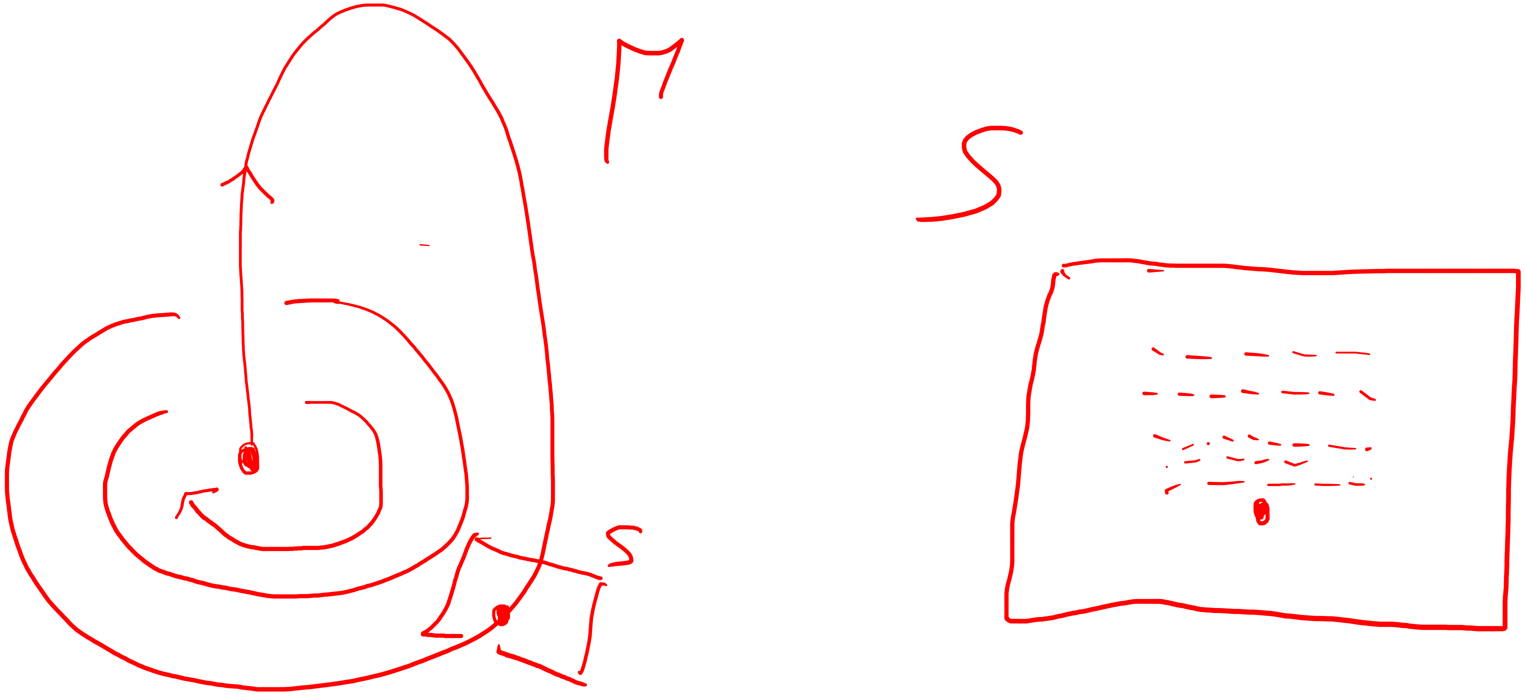
$$d(\{x_i\}_i, \{y_i\}_i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

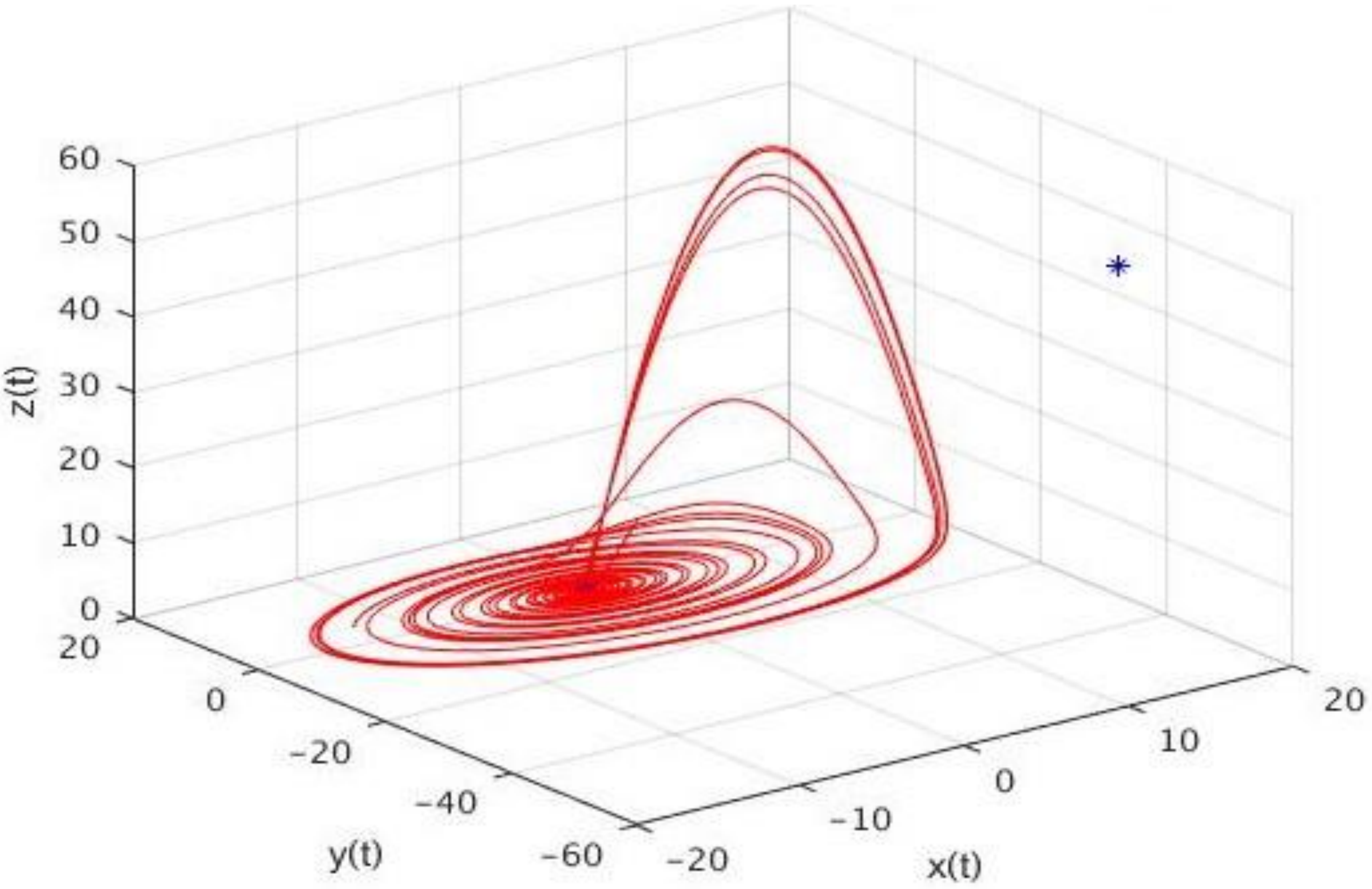
- גם קל להראות שהנקודות המחזוריות צפופות – הרי אם $(\dots x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ סדרה כלשהי, נוכל לקרבה על ידי שרשור סדרות מחזוריות – למשל, $(x_{-n}, x_n, \dots, x_0, \dots, x_{-n}, x_n \dots)$.

- בנוסף, ישנה טרנזיטיביות – ישנה נקודה x כך שאוסף הסדרות $\{f^n(x)\}_{n\geq 0}$ צפופה ב $\{1,2\}^{\mathbb{Z}}$.

סוף ההוכחה

- **מסקנה** – העתקת הפואנקרה כאוטית בכל סביבה של Γ – **כלומר, בכל סביבה של המסילה ישנה קבוצה עליה העתקת פואנקרה מתנהגת כאוטית.**
- **כלומר** – מתקיימת מסקנת משפט שילניקוב.




60
50
40
30
20
10
0
z(t)
20
0
-20
-40
-60
y(t)
-20
-10
0
10
20
x(t)

ישומים למשפט שילניקוב –

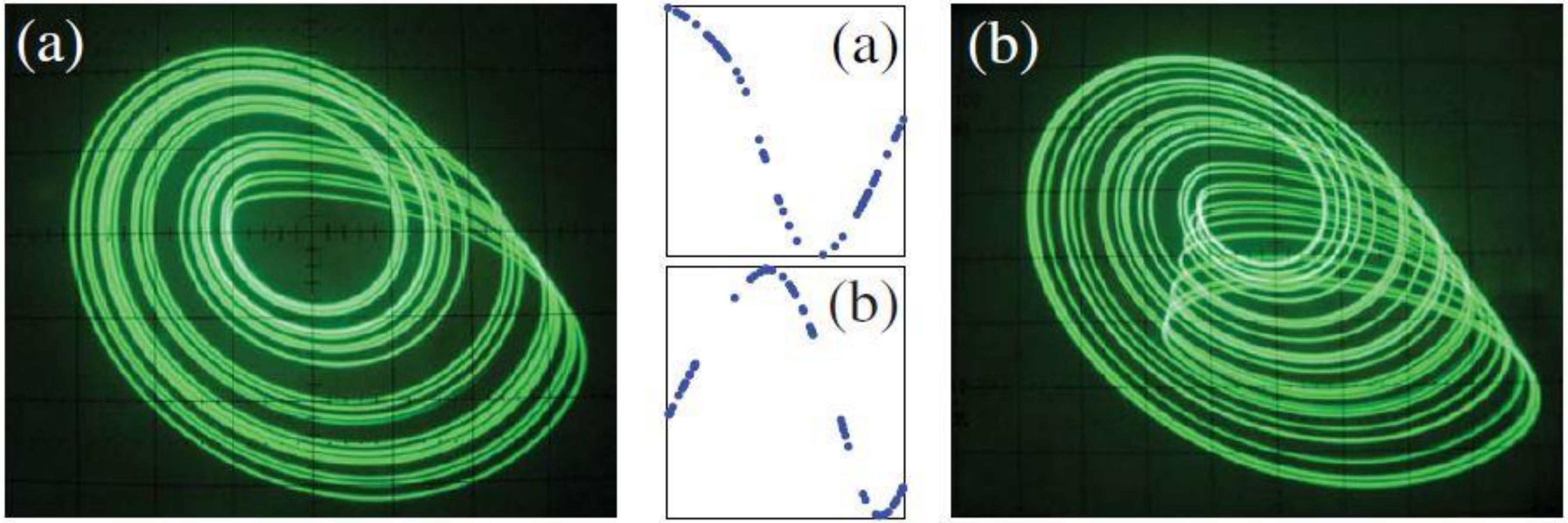
- קשה להוכיח שמערכת דינמית נתונה מקיימת את תנאי משפט שילניקוב. לעיתים זה אפשרי – כמו במקרה של מערכת מיכלסון [4].

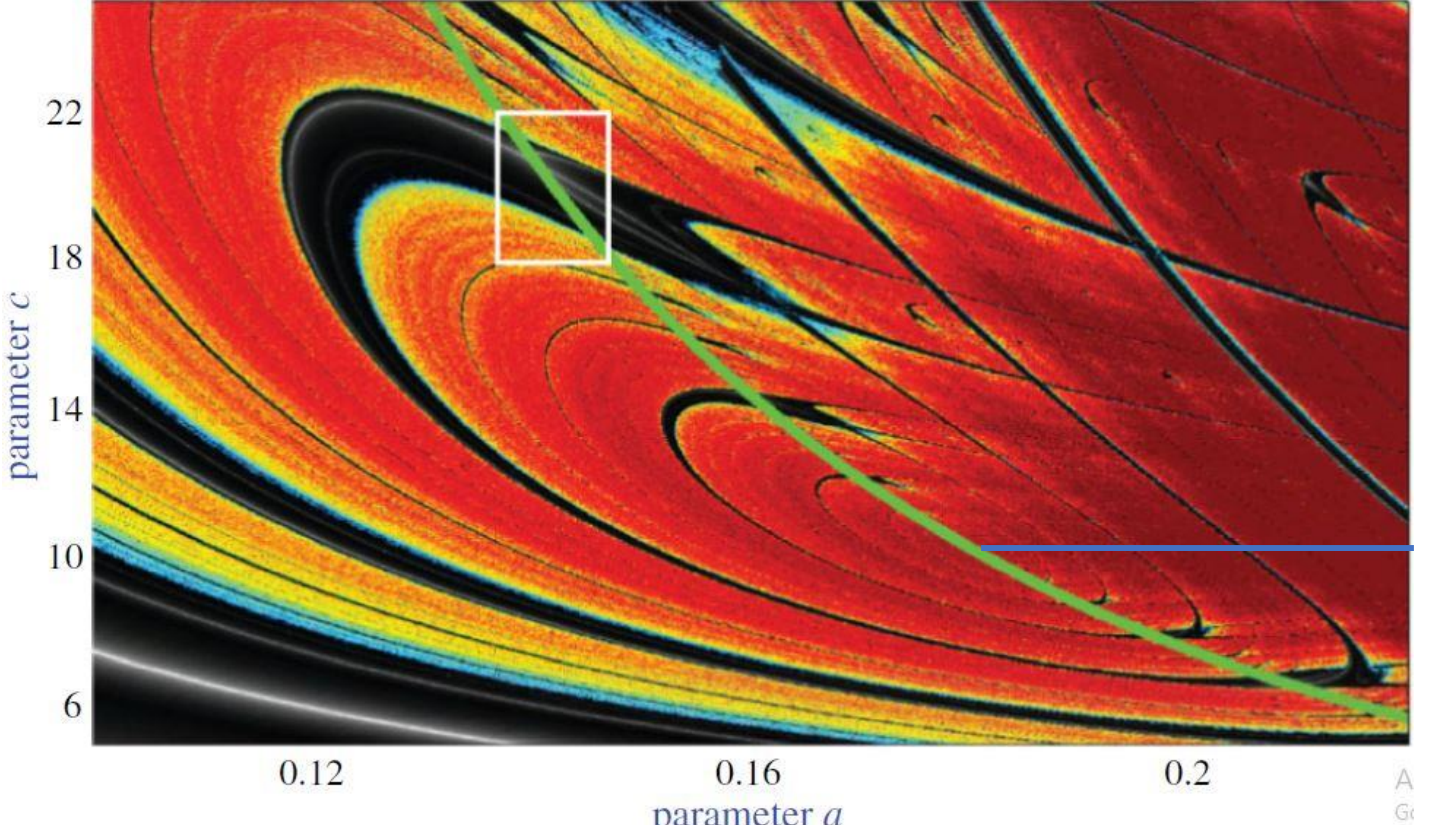
- במקרים אחרים, חלק מהכללותיו מאפשרות לתת מסגרת תיאורטית המסבירה את הופעת אטרקטורים "דומים" לאטרקטור של לורנץ [5].

- עם זאת, בהתחשב בכך שמשפט שילניקוב תלוי בפרמטרים, הוא כלי חזק מאוד עבור נומריקאים המאפשר לנתח דיאגרמות ביפורקציה.

מהי ביפורקציה?

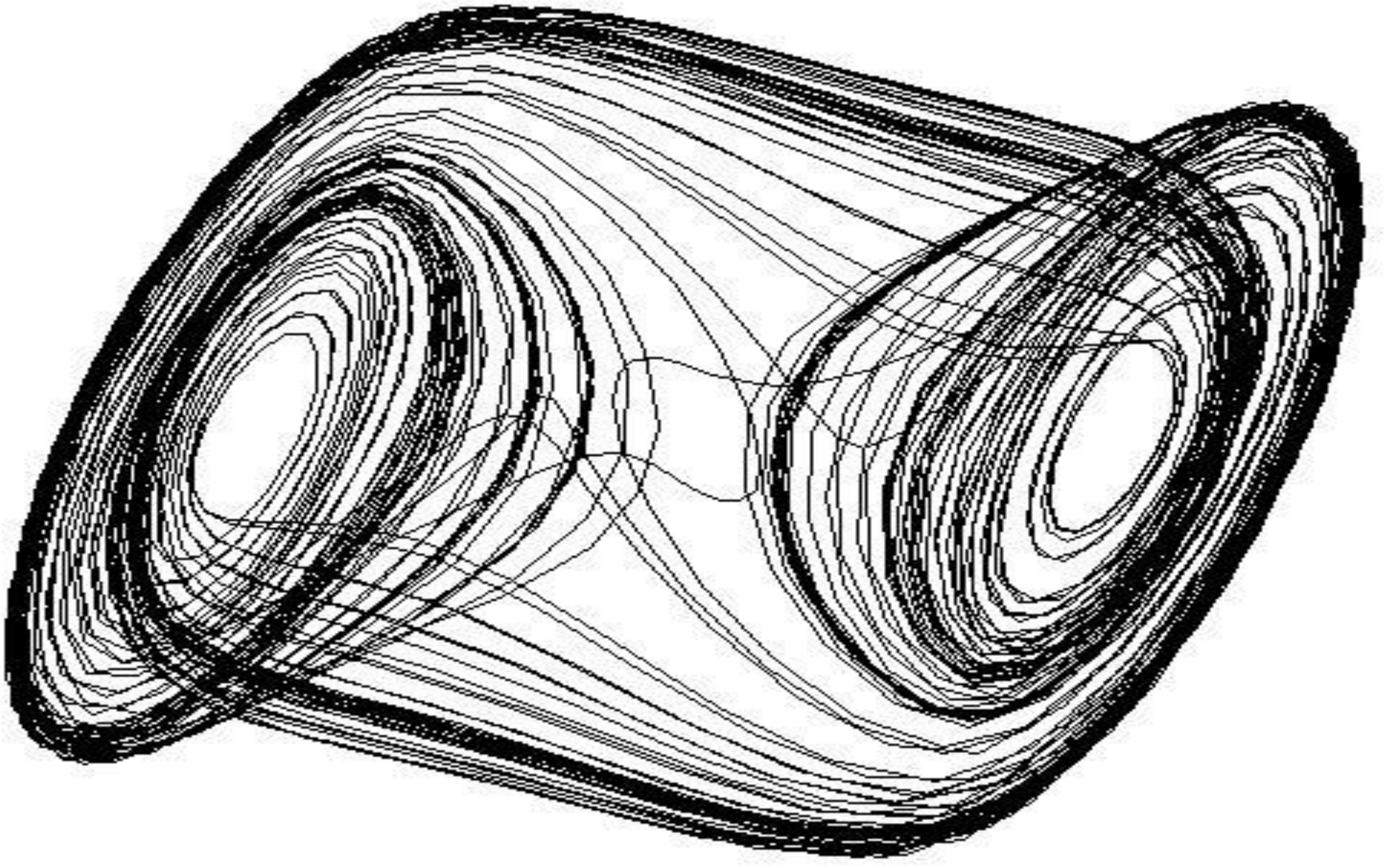
- ביפורקציה היא "שינוי איכותי" באטרקטור – כלומר, שהטופולוגיה שלו משתנה ללא היכר. למשל, נתבונן בדוגמא הבאה מ[6].
- אחת ההשערות הנומריות היא שהביפורקציה למטה מתרחשת עקב תנאים הקשורים במשפט שילניקוב.
- את הסיבות להשערה הזאת ניתן לראות בתמונה הבאה מ[6] ו[7]:





22
18
14
10
6
parameter c
0.12
0.16
0.2
parameter a

תודה על הקשבה!



Refs.

[1] – Deterministic nonperiodic flow, E.N. Lorenz, Journal of the atmospheric sciences, 20, 1963

[2] – An equation for continuous chaos, O.E. Rössler, Physics letters 57A, 1976

[3] – A case of the existence of a denumerable set of periodic motions, L.P. Shilnikov, Sov. Math. Dokl. 6, 1965

[4] – The existence of Shilnikov homoclinic orbits in the Michelson system: a computer assisted proof, D. Wilczak, Found. In Comp. Math., 2006

[5] – Analytic proof of the existence of the Lorenz Attractor in the extended Lorenz model, I.I. Ovsyannikov, D.V. Turaev, Nonlinearity 30, 2017

[6] – Topological changes in periodicity hubs of dissipative systems, R. Bario, F. Blesa, S. Serrano, Physical Review Letters 108, 2012

[7] – Symbolic dynamics and spiral structures due to saddle focus bifurcations, A. Shilnikov, R. Barrio, Chaos, CNN, Memristors and beyond, World Scientific